

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Отборочный этап 2024/25 учебного года для 10 класса

Задача 1

В-1 Сколько существует целых чисел N , при которых $48000 \cdot (2.5^N + 2.5^{N+1})$ — целое число?

Ответ: 10

Решение. Разложим выражение на простые множители:

$$48000 \cdot (2.5^N + 2.5^{N+1}) = 2^4 \cdot 3 \cdot (2 \cdot 5)^3 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^N \cdot \left(1 + \frac{5}{2}\right) = 2^{6-N} \cdot 5^{3+N} \cdot 3 \cdot 7.$$

Так как числа 2, 3, 5 и 7 взаимно простые, то данное выражение будет целым, если одновременно выполняются два условия: $6 - N \geq 0$ и $3 + N \geq 0$.

Получается 10 значений.

В-2 Сколько существует целых чисел N , при которых $160000 \cdot (1.25^N + 1.25^{N+1})$ — целое число?

Ответ: 8

В-3 Сколько существует целых чисел N , при которых $32000 \cdot (2.5^N + 2.5^{N+1})$ — целое число?

Ответ: 11

В-4 Сколько существует целых чисел N , при которых $80000 \cdot (1.25^N + 1.25^{N+1})$ — целое число?

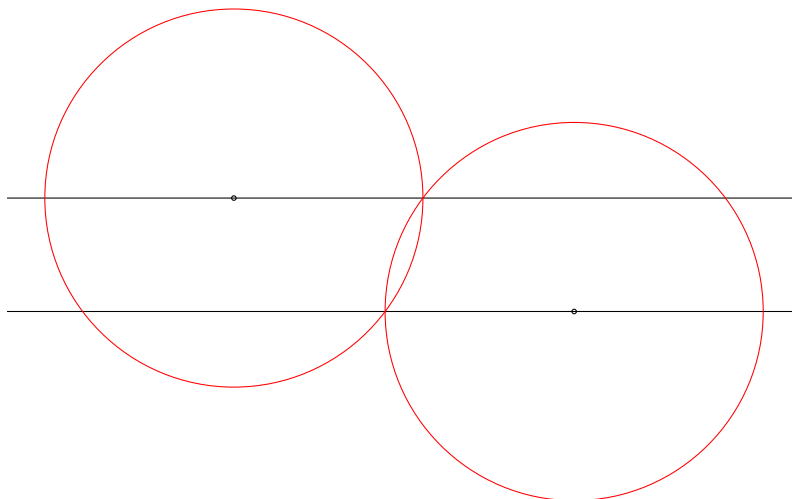
Ответ: 7

Задача 2

В-1 Улица имеет форму полосы длины 200 м и ширины 5 м. Вдоль каждого края улицы стоят фонари, каждый из которых освещает круг радиуса 13 м вокруг себя. Какое минимальное число фонарей надо расставить, чтобы улица была полностью освещена?

Ответ: 9

Решение.



На своей стороне фонарь с радиусом 13 м освещает по 13 м обочины в обе стороны. Значит, на противоположной стороне он может осветить $\sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ метров обочины в обе стороны. Так или иначе, обе обочины нужно осветить полностью — один фонарь может осветить 24 + 26 метров обочин, обе обочины дают в общей сложности 400 м, так что понадобится минимум $\frac{400}{50} = 8$ фонарей. Если у нас есть всего 8 фонарей, то общую длину обочин они освещают «впритык» — если вдруг освещение на обочинах наложится друг на друга, то общей длины уже не хватит на всю улицу. Это принуждает нас к оптимальной расстановке фонарей в «шахматном порядке» — то есть если на этой стороне есть фонарь, то через 25 метров на противоположной стороне будет стоять следующий фонарь. Отдельно взятую обочину поочерёдно освещают то фонари с этой стороны, то с противоположной — без пробелов и наложений. Будь следующий фонарь на другом расстоянии, или у другой обочины — получилось бы наложение света, или же пробел, которой бы пришлось заполнять дополнительным фонарём. Поэтому расстановка шахматная.

Само дорожное полотно с такой расстановкой тоже будет освещено полностью — с небольшими наложениями.

С такой расстановкой получится осветить по 200 метров обочины с каждой стороны всего восьмью фонарями — но эти 200 метров освещённых обочин будут сдвинуты на метр относительно друг друга. Около торца прямоугольной улицы получится небольшой неосвещённый «треугольник». Для того, чтобы осветить всю улицу, понадобится 9-й фонарь.

В-2 Улица имеет форму полосы длины 320 м и ширины 8 м. Вдоль каждого края улицы стоят фонари, каждый из которых освещает круг радиуса 17 м вокруг себя. Какое минимальное число фонарей надо расставить, чтобы улица была полностью освещена?

Ответ: 11

В-3 Улица имеет форму полосы длины 294 м и ширины 7 м. Вдоль каждого края улицы стоят фонари, каждый из которых освещает круг радиуса 25 м вокруг себя. Какое минимальное число фонарей надо расставить, чтобы улица была полностью освещена?

Ответ: 7

В-4 Улица имеет форму полосы длины 972 м и ширины 9 м. Вдоль каждого края улицы стоят фонари, каждый из которых освещает круг радиуса 41 м вокруг себя. Какое минимальное число фонарей надо расставить, чтобы улица была полностью освещена?

Ответ: 13

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Отборочный этап 2024/25 учебного года для 10 класса

Задача 3

В-1 Найти все значения параметра a , при каждом из которых неравенство

$$25y^2 + \frac{1}{100} \geq x - axy + y - 25x^2$$

выполняется для любых пар чисел (x, y) , таких что $|x| = |y|$. В ответ записать сумму возможных значений параметра a , если их конечное число, или сумму длин интервалов возможных значений a , если значений a бесконечно много. Если значений a нет никаких — пишите 0.

Ответ: 50

Решение. Рассматриваем случаи $y = x$ и $y = -x$. В случае, когда $x = y$, имеем:

$$x^2(50 + a) - 2x + \frac{1}{100} \geq 0.$$

В случае, когда $x = -y$, имеем:

$$x^2(50 - a) + \frac{1}{100} \geq 0.$$

Рассмотрим сначала случай $x = y$. Слева график — парабола. Чтобы неравенство выполнялось для всех x , необходимо, чтобы ветви были направлены вверх, следовательно, $50 + a > 0$ и дискриминант был неположительный (покажем про упрощенный дискриминант)

$$1 - \frac{50 + a}{100} \leq 0$$

Из первого неравенства следует, что $a > -50$. А из второго $a \geq 50$. Следовательно, имеем $a \geq 50$.

Аналогично, для случая $x = -y$ имеем $a \leq 50$. Значит, $a = 50$.

В-2 Найти все значения параметра a , при каждом из которых неравенство

$$24y^2 + \frac{1}{96} \geq x - axy + y - 24x^2$$

выполняется для любых пар чисел (x, y) , таких что $|x| = |y|$. В ответ записать сумму возможных значений параметра a , если их конечное число, или сумму длин интервалов возможных значений a , если значений a бесконечно много. Если значений a нет никаких — пишите 0.

Ответ: 48

В-3 Найти все значения параметра a , при каждом из которых неравенство

$$2025y^2 + \frac{1}{8100} \geq x - axy + y - 2025x^2$$

выполняется для любых пар чисел (x, y) , таких что $|x| = |y|$. В ответ записать сумму возможных значений параметра a , если их конечное число, или сумму длин интервалов возможных значений a , если значений a бесконечно много. Если значений a нет никаких — пишите 0.

Ответ: 4050

В-4 Найти все значения параметра a , при каждом из которых неравенство

$$2024y^2 + \frac{1}{8096} \geq x - axy + y - 2024x^2$$

выполняется для любых пар чисел (x, y) , таких что $|x| = |y|$. В ответ записать сумму возможных значений параметра a , если их конечное число, или сумму длин интервалов возможных значений a , если значений a бесконечно много. Если значений a нет никаких — пишите 0.

Ответ: 4048

В-5 Найти все значения параметра a , при каждом из которых неравенство

$$506y^2 + \frac{1}{2024} \geq x - axy + y - 506x^2$$

выполняется для любых пар чисел (x, y) , таких что $|x| = |y|$. В ответ записать сумму возможных значений параметра a , если их конечное число, или сумму длин интервалов возможных значений a , если значений a бесконечно много. Если значений a нет никаких — пишите 0.

Ответ: 1012

В-6 Найти все значения параметра a , при каждом из которых неравенство

$$1012y^2 + \frac{1}{4048} \geq x - axy + y - 1012x^2$$

выполняется для любых пар чисел (x, y) , таких что $|x| = |y|$. В ответ записать сумму возможных значений параметра a , если их конечное число, или сумму длин интервалов возможных значений a , если значений a бесконечно много. Если значений a нет никаких — пишите 0.

Ответ: 2024

В-7 Найти все значения параметра a , при каждом из которых неравенство

$$12y^2 + \frac{1}{48} \geq x - axy + y - 12x^2$$

выполняется для любых пар чисел (x, y) , таких что $|x| = |y|$. В ответ записать сумму возможных значений параметра a , если их конечное число, или сумму длин интервалов возможных значений a , если значений a бесконечно много. Если значений a нет никаких — пишите 0.

Ответ: 24

В-8 Найти все значения параметра a , при каждом из которых неравенство

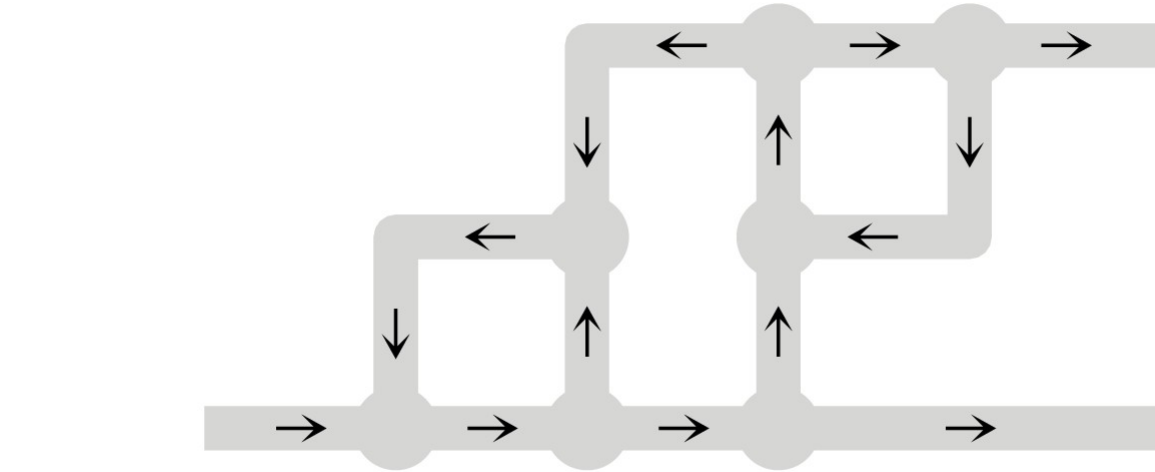
$$20y^2 + \frac{1}{80} \geq x - axy + y - 20x^2$$

выполняется для любых пар чисел (x, y) , таких что $|x| = |y|$. В ответ записать сумму возможных значений параметра a , если их конечное число, или сумму длин интервалов возможных значений a , если значений a бесконечно много. Если значений a нет никаких — пишите 0.

Ответ: 40

Задача 4

B-1

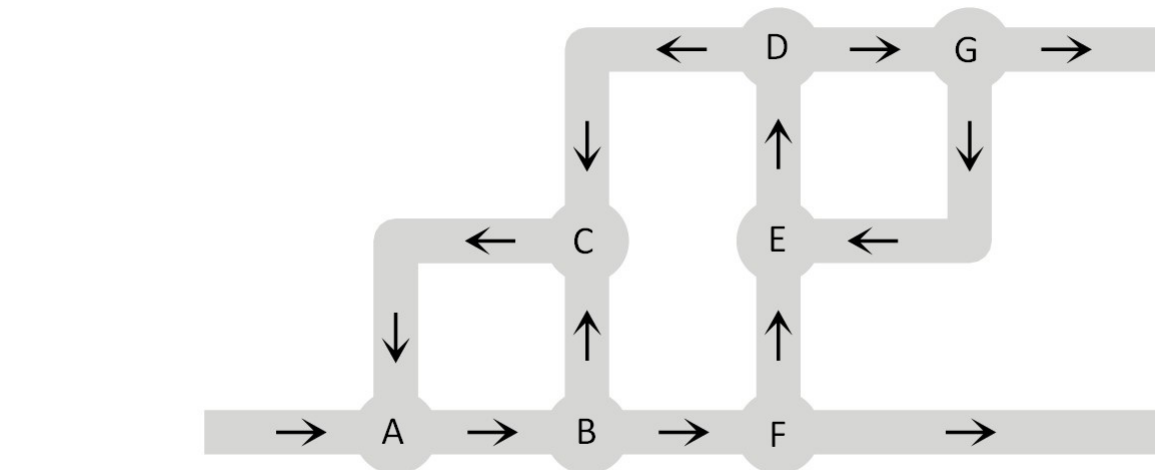


Через переплетение труб и клапанов течёт вода. Система односторонняя, вода течёт в направлении стрелок. Вода со всех входящих в клапан труб складывается вместе, а потом делится поровну между всеми исходящими из клапана трубами.

Какая часть входящего потока выйдет через верхнюю трубу? Ответ при необходимости округлите до сотых.

Ответ: 0.25

Решение.



Пойдём по трубам последовательно. В клапане A к потоку извне (пусть он равен 1) прибавляется сколько-то воды от обратной петли. Сколько по ней поступает — нам пока неизвестно, поэтому обозначим добавленное количество неизвестной x . Тогда: в точке B поток разделится на $\frac{1+x}{2}$ и $\frac{1+x}{2}$. В точке F приходящее разделится на $\frac{1+x}{4}$ и $\frac{1+x}{4}$. В точке E к $\frac{1+x}{4}$ прибавится неизвестное количество y . В точке D поток $\frac{1+x}{4} + y$ разбивается пополам, течёт к G и C , и если

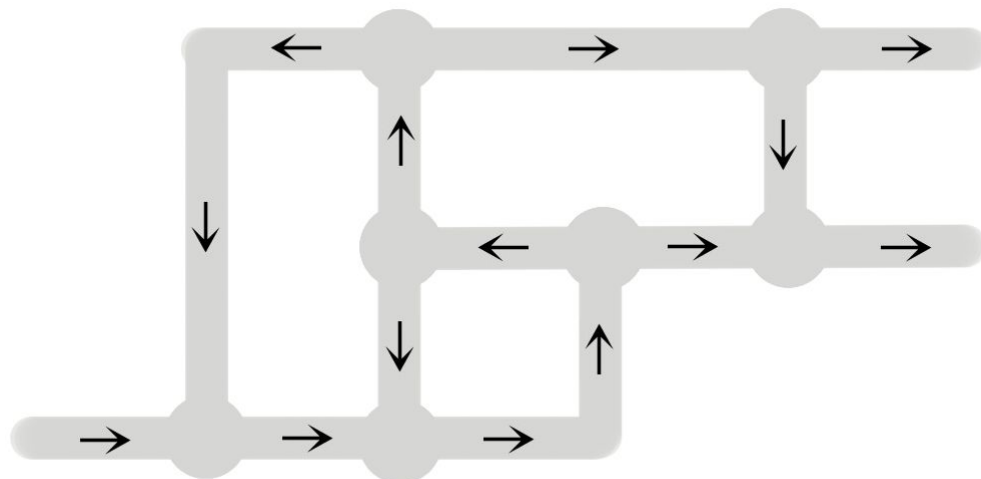
мы напишем условия равновесия в клапанах G и C — мы получим систему, определяющую значения x и y . Система такая:

$$\begin{cases} \frac{1+x}{8} + \frac{y}{2} = 2y, \\ \frac{1+x}{8} + \frac{y}{2} + \frac{1+x}{2} = x. \end{cases}$$

Решения системы — $y = \frac{1}{4}, x = 2$.

Через верхнюю трубу выходит y , а y равно 0.25, это и будет ответ.

В-2

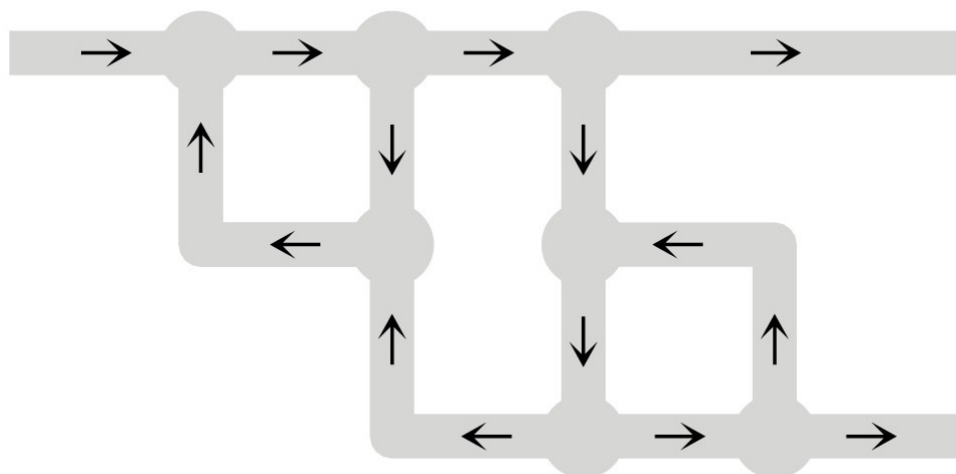


Через переплетение труб и клапанов течёт вода. Система односторонняя, вода течёт в направлении стрелок. Вода со всех входящих в клапан труб складывается вместе, а потом делится поровну между всеми исходящими из клапана трубами.

Какая часть входящего потока выйдет через верхнюю трубу? Ответ при необходимости округлите до сотых.

Ответ: 0.1

В-3

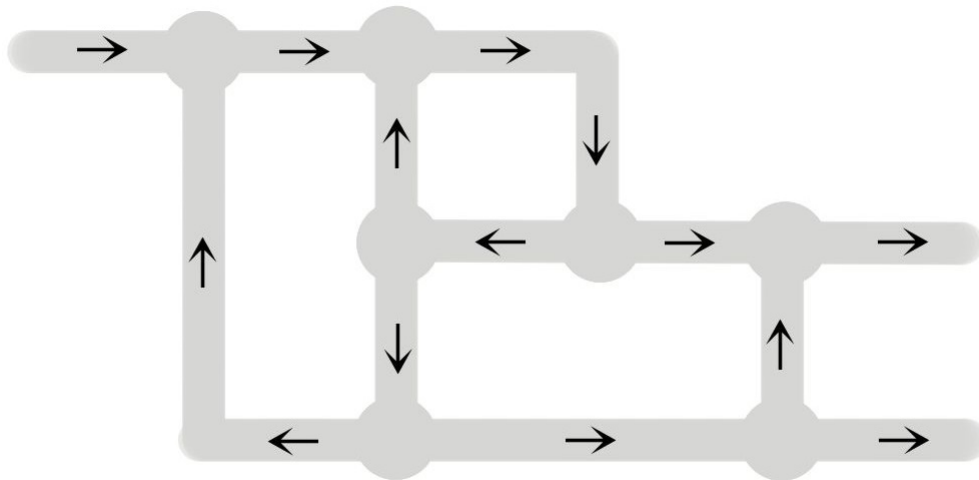


Через переплетение труб и клапанов течёт вода. Система односторонняя, вода течёт в направлении стрелок. Вода со всех входящих в клапан труб складывается вместе, а потом делится поровну между всеми исходящими из клапана трубами.

Какая часть входящего потока выйдет через верхнюю трубу? Ответ при необходимости округлите до сотых.

Ответ: 0.75

B-4



Через переплетение труб и клапанов течёт вода. Система односторонняя, вода течёт в направлении стрелок. Вода со всех входящих в клапан труб складывается вместе, а потом делится поровну между всеми исходящими из клапана трубами.

Какая часть входящего потока выйдет через верхнюю трубу? Ответ при необходимости округлите до сотых.

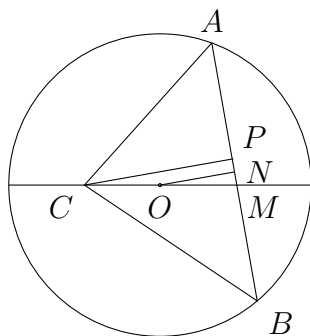
Ответ: 0.9

Задача 5

В-1 Дана окружность с центром O и радиусом $4\sqrt{3}$. Проведена хорда AB , которая оказалась гипотенузой прямоугольного треугольника ABC . Диаметр окружности, проходящий через вершину C , делится на четыре равных отрезка вершиной C треугольника, центром O окружности и точкой пересечения диаметра с хордой AB . Найдите расстояние от центра окружности до хорды AB .

Ответ: 3

Решение.



Пусть M — точка пересечения диаметра с гипотенузой AB . Отметим, что расположение точек O, C, M на диаметре определяется однозначно — так как O обязана быть посередине.

Опустим из точки O перпендикуляр ON к хорде AB . Тогда N — середина отрезка AB (так как ON — высота равнобедренного треугольника AOB). Проведем $CP \parallel ON$ (где P лежит на AB) и соединим N и C отрезком прямой. Рассмотрим треугольник MCP . Отрезок ON — средняя линия треугольника, тогда $CP = 2 \cdot ON$. Отрезок CN — медиана в прямоугольном треугольнике ABC , следовательно $CN = \frac{1}{2}AB = NB$.

Пусть $ON = x$, $MN = NP = y$, $CN = NB = z$.

Тогда, так как $OM = \frac{1}{2}R$, из треугольников ONB , CNP и OMN на основании теоремы Пифагора получаем:

$$\begin{cases} x^2 = R^2 - z^2, \\ (2x)^2 = z^2 - y^2, \\ x^2 = \left(\frac{1}{2}R\right)^2 - y^2. \end{cases}$$

Складывая почленно первые два уравнения и затем вычитая из результата третье, находим

$$\begin{aligned} (2x)^2 &= R^2 - \left(\frac{1}{2}R\right)^2, \\ 4x^2 &= \frac{3}{4}R^2, \\ x &= \frac{\sqrt{3}}{4}R. \end{aligned}$$

В-2 Дана окружность с центром O и радиусом $8\sqrt{3}$. Проведена хорда AB , которая оказалась гипотенузой прямоугольного треугольника ABC . Диаметр окружности, проходящий через вершину C , делится на четыре равных отрезка вершиной C треугольника, центром O окружности и точкой пересечения диаметра с хордой AB . Найдите расстояние от центра окружности до хорды AB .

Ответ: 6

В-3 Дана окружность с центром O и радиусом $16\sqrt{3}$. Проведена хорда AB , которая оказалась гипотенузой прямоугольного треугольника ABC . Диаметр окружности, проходящий через вершину C , делится на четыре равных отрезка вершиной C треугольника, центром O окружности и точкой пересечения диаметра с хордой AB . Найдите расстояние от центра окружности до хорды AB .

Ответ: 12

В-4 Дана окружность с центром O и радиусом $32\sqrt{3}$. Проведена хорда AB , которая оказалась гипотенузой прямоугольного треугольника ABC . Диаметр окружности, проходящий через вершину C , делится на четыре равных отрезка вершиной C треугольника, центром O окружности и точкой пересечения диаметра с хордой AB . Найдите расстояние от центра окружности до хорды AB .

Ответ: 24

Задача 6

В-1 Найдите $\operatorname{tg}|x|$, если известно, что

$$\left(5 \sin x + 3 \cos x + \sqrt{2}\right) \left(\sqrt{11} - 3\sqrt{\sin |x|}\right) = 0.$$

В ответе укажите сумму всех возможных значений $\operatorname{tg}|x|$, округлённую до тысячных.

Ответ: 0.696

Решение. Отметим, что вторая скобка не обращается в ноль, так как $\sqrt{\sin |x|} \leq 1 < \frac{\sqrt{11}}{3}$. Таким образом, уравнение равносильно системе уравнения и неравенства

$$\begin{cases} \sin |x| \geq 0, \\ 5 \sin x + 3 \cos x + \sqrt{2} = 0. \end{cases}$$

Решаем уравнение из этой системы — получаем ещё одну систему из уравнения и неравенства:

$$\begin{cases} 5 \sin x + 3 \cos x < 0 \\ 25 \sin^2 x + 30 \sin x \cos x + 9 \cos^2 x = 2 \end{cases}$$

Решаем уравнение:

$$25 \sin^2 x + 30 \sin x \cos x + 9 \cos^2 x = 2$$

$$25 \sin^2 x + 30 \operatorname{tg} x \cos^2 x + 9 \cos^2 x = 2$$

Используем замены $\sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$, $\cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$.

$$25 \left(\frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} \right) + 30 \operatorname{tg} x \left(\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} \right) + 9 \left(\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} \right) = 2$$

Умножаем на $1 + \operatorname{tg}^2 x$, переносим всё на одну сторону — и получаем квадратное уравнение

$$23 \operatorname{tg}^2 x + 30 \operatorname{tg} x + 7 = 0.$$

Решения уравнения — это $\operatorname{tg} x = -1$ и $\operatorname{tg} x = -\frac{7}{23}$. В свою очередь, $\operatorname{tg}|x|$ сможет потенциально принимать такие значения: $1, -1, \frac{7}{23}, -\frac{7}{23}$ (потому что, обрамляя x модулем, мы либо оставляем x как есть, либо умножаем на минус один — а тангенс функция нечётная.) Проверим, подходят ли найденные x под накопившиеся условия. Перед проверкой условий отметим, что

$$\operatorname{tg}|x| = \frac{\sin |x|}{\cos |x|} = \frac{\sin |x|}{\cos x}.$$

Для выполнения условий нужно, чтобы знак $\operatorname{tg}|x|$ совпадал со знаком $\cos x$.

Когда $\cos x > 0$, из неравенства во второй системе следует, что $\operatorname{tg} x \leq -\frac{3}{5}$. Значит, $\operatorname{tg} x = -1$, но $\operatorname{tg}|x| > 0$, поэтому $\operatorname{tg}|x| = 1$.

Когда $\cos x < 0$, из неравенства во второй системе следует, что $\operatorname{tg} x \geq -\frac{3}{5}$. Значит, $\operatorname{tg} x = -\frac{7}{23}$, но $\operatorname{tg}|x| < 0$, поэтому $\operatorname{tg}|x| = -\frac{7}{23}$.

В ответ идёт $1 - \frac{7}{23}$.

В-2 Найдите $\operatorname{ctg}|x|$, если известно, что

$$\left(5 \cos x + 7 \sin x + \sqrt{2}\right) \left(\sqrt{2} - \sqrt{\sin |x|}\right) = 0.$$

В ответе укажите сумму всех возможных значений $\operatorname{ctg}|x|$, округлённую до тысячных.

Ответ: -1.043

В-3 Найдите $\operatorname{tg} 2|x|$, если известно, что

$$\left(5 \sin 2x + 3 \cos 2x + \sqrt{2}\right) \left(\sqrt{11} - 3\sqrt{\sin 2|x|}\right) = 0.$$

В ответе укажите сумму всех возможных значений $\operatorname{tg} 2|x|$, округлённую до тысячных.

Ответ: 0.696

В-4 Найдите $\operatorname{ctg} 3|x|$, если известно, что

$$\left(5 \cos 3x + 7 \sin 3x + \sqrt{2}\right) \left(\sqrt{2} - \sqrt{\sin 3|x|}\right) = 0.$$

В ответе укажите сумму всех возможных значений $\operatorname{ctg} 3|x|$, округлённую до тысячных.

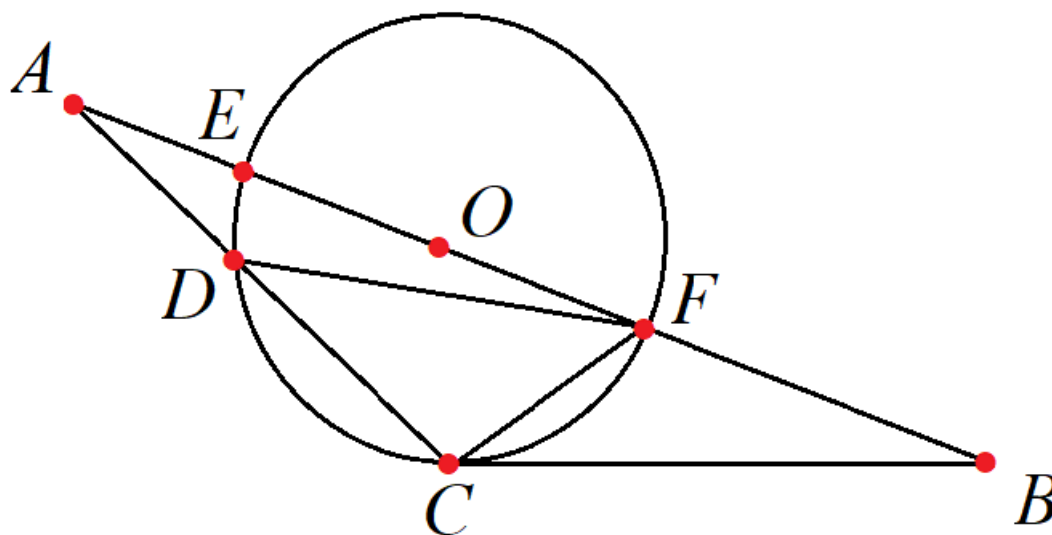
Ответ: -1.043

Задача 7

В-1 Окружность с центром O на стороне AB треугольника ABC пересекает сторону AC в точках C и D , касается стороны BC и пересекает отрезок AO в точке E , а отрезок BO в точке F . Найдите площадь треугольника ABC , если $BC = 5$, $FB = 3$ и $\angle ACB = \angle DFC + 90^\circ$. При необходимости округлите ответ до сотых.

Ответ: 14.29

Решение.



Так как окружность касается BC , то C — точка касания. По теореме о касательной и секущей $BC^2 = BE \cdot BF \Rightarrow 5^2 = (3 + 2R) \cdot 3 \Rightarrow R = \frac{8}{3}$.

Продолжим CO до диаметра. Тогда из точки пересечения этого диаметра с окружностью C_1 (на рисунке не обозначена) на хорду DC будет опираться угол, равный $\angle DFC$. При этом треугольник CDC_1 опирается на диаметр, поэтому он прямоугольный, а угол $\angle OCB$ прямой, и $\angle DCB = 90^\circ + \angle OCD$. Вместе это значит, что $\angle DCB + \angle DFC = 180^\circ$. Так как $\angle DCB + \angle DFC = 180^\circ$, а $\angle DCB - \angle DFC = 90^\circ$ (по условию), то $\angle DCB = 135^\circ$ и $\angle DFC = 45^\circ$. Отсюда соответствующий центральный угол $\angle DOC = 90^\circ$, и, так как OC перпендикулярно CB , отрезок DO параллелен CB .

Тогда

$$\frac{AO}{AB} = \frac{DO}{CB} \Rightarrow \frac{AF - \frac{8}{3}}{AF + 3} = \frac{\frac{8}{3}}{5} \Rightarrow AF = \frac{64}{7} \Rightarrow AB = \frac{85}{7}.$$

Так как

$$\sin \angle ABC = \frac{R}{R + 3} = \frac{8}{17},$$

то

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{85}{7} \cdot 5 \cdot \frac{8}{17} = \frac{100}{7}.$$

В-2 Окружность с центром O на стороне AB треугольника ABC пересекает сторону AC в точках C и D , касается стороны BC и пересекает отрезок AO в точке E , а отрезок BO в точке F . Найдите площадь треугольника ABC , если $BC = 5$, $FB = 4$ и $\angle ACB = \angle DFC + 90^\circ$. При необходимости округлите ответ до сотых.

Ответ: 3.63

В-3 Окружность с центром O на стороне AB треугольника ABC пересекает сторону AC в точках C и D , касается стороны BC и пересекает отрезок AO в точке E , а отрезок BO в точке

F. Найдите площадь треугольника ABC , если $BC = 6$, $FB = 4$ и $\angle ACB = \angle DFC + 90^\circ$. При надобности округлите ответ до сотых.

Ответ: 12.86

В-4 Окружность с центром O на стороне AB треугольника ABC пересекает сторону AC в точках C и D , касается стороны BC и пересекает отрезок AO в точке E , а отрезок BO в точке F . Найдите площадь треугольника ABC , если $BC = 3$, $FB = 2$ и $\angle ACB = \angle DFC + 90^\circ$. При надобности округлите ответ до сотых.

Ответ: 3.21

В-5 Окружность с центром O на стороне AB треугольника ABC пересекает сторону AC в точках C и D , касается стороны BC и пересекает отрезок AO в точке E , а отрезок BO в точке F . Найдите площадь треугольника ABC , если $BC = 4$, $FB = 3$ и $\angle ACB = \angle DFC + 90^\circ$. При надобности округлите ответ до сотых.

Ответ: 3.29

В-6 Окружность с центром O на стороне AB треугольника ABC пересекает сторону AC в точках C и D , касается стороны BC и пересекает отрезок AO в точке E , а отрезок BO в точке F . Найдите площадь треугольника ABC , если $BC = 7$, $FB = 5$ и $\angle ACB = \angle DFC + 90^\circ$. При надобности округлите ответ до сотых.

Ответ: 12.78

В-7 Окружность с центром O на стороне AB треугольника ABC пересекает сторону AC в точках C и D , касается стороны BC и пересекает отрезок AO в точке E , а отрезок BO в точке F . Найдите площадь треугольника ABC , если $BC = 8$, $FB = 5$ и $\angle ACB = \angle DFC + 90^\circ$. При надобности округлите ответ до сотых.

Ответ: 30.44

В-8 Окружность с центром O на стороне AB треугольника ABC пересекает сторону AC в точках C и D , касается стороны BC и пересекает отрезок AO в точке E , а отрезок BO в точке F . Найдите площадь треугольника ABC , если $BC = 8$, $FB = 6$ и $\angle ACB = \angle DFC + 90^\circ$. При надобности округлите ответ до сотых.

Ответ: 13.18

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Отборочный этап 2024/25 учебного года для 10 класса

Задача 8

В-1 11 друзей катаются на катке в форме правильного 22-угольника. Каждый из них выбрал себе одну пару параллельных сторон катка и катается между ними по прямолинейной траектории: стартовав от первой стороны, он доезжает до второй, касается заснеженного бортика и едет обратно к первой. И так далее. Через какое-то время оказалось, что суммарно на всех бортиках оказалось 2024 отпечатков рук (включая сделанные в конце, а в начале движения отпечатки не делаются), в углах бортиков отпечатков нет, а все ребята стоят у того бортика, от которого начали движение. Какое максимальное число пересечений траекторий могло получиться? (Самопересечения траекторий не учитываются.)

Ответ: 1862080

Решение. Ясно, что в одной точке не могут пересечься траектории более двух друзей – иначе число пересечений можно увеличить, немного подвинув траектории. При этом точек пересечения разных траекторий конечное число, потому что никто не ехал по диагонали (т.к. нет отпечатков в углах). Для вычисления можно считать, что траектория движения каждого из друзей состоит из параллельных линий (они будут перпендикулярны соответствующей данному другу паре бортиков). Число линий равно 2024. И если каждый j -й друг прочертил n_j линий, то $n_1 + n_2 + \dots + n_{11} = 2024$. Теперь нам нужно максимизировать число пересечений, т.е. сумму всевозможных величин $n_k \cdot n_l$ при различных k, l . Ясно (но это требует доказательства!), что максимум достигается при $n_1 = n_2 = \dots = n_{11}$. Поэтому искомый максимум равен $\frac{10 \cdot 11}{2} \left(\frac{2024}{11}\right)^2 = 1862080$.

Обоснуем, что максимум $\sum_{k < l} n_k \cdot n_l$ достигается при равенстве величин n_i . Переложим единицу с n_1 на n_2 и сравним суммы попарных произведений до и после:

$$n_1, n_2, n_3, \dots, n_m \rightarrow n_1 \cdot n_2 + n_1 \cdot n_3 + \dots + n_{m-1} \cdot n_m.$$

$$n_1 - 1, n_2 + 1, n_3, \dots, n_m \rightarrow (n_1 \cdot n_2 + n_1 \cdot n_3 + \dots + n_{m-1} \cdot n_m) - n_2 - n_3 - \dots - n_m + n_1 + n_3 + \dots + n_m - 1$$

То есть изменение суммы равно $n_1 - n_2 - 1$. Если $n_1 = n_2 + k$, (то есть n_1 было больше), то мы добиваемся прироста суммы произведений размера $k - 1$. Если, наоборот, n_2 было больше n_1 , то получается гарантированная убыль. Значит, если сумма n_i фиксированная, переложить баллы с большего n_i на меньшее n_j выгодно (если $|n_i - n_j| = 1$, то такие перекладывания ничего не добавляют). Получается, что самая выгодная конфигурация — когда нету больших и меньших значений, когда множители равны друг другу и общая сумма поделена поровну (а если поровну баллы не делятся, то n_i равны друг другу с точностью до единицы, но в нашем случае 2024 делится на 11 без остатка).

В-2 8 друзей катаются на катке в форме правильного 16-угольника. Каждый из них выбрал себе одну пару параллельных сторон катка и катается между ними по прямолинейной траектории: стартовав от первой стороны, он доезжает до второй, касается заснеженного бортика и едет обратно к первой. И так далее. Через какое-то время оказалось, что суммарно на всех бортиках оказалось 2024 отпечатков рук (включая сделанные в конце, а в начале движения отпечатки не делаются), в углах бортиков отпечатков нет, а все ребята стоят у того бортика, от которого начали движение. Какое максимальное число пересечений траекторий могло получиться? (Самопересечения траекторий не учитываются.)

Ответ: 1792248

Решение. Ясно, что в одной точке не могут пересечься траектории более двух друзей – иначе число пересечений можно увеличить, немного подвинув траектории. При этом точек пересечения разных траекторий конечное число, потому что никто не ехал по диагонали (т.к.

нет отпечатков в углах). Для вычисления можно считать, что траектория движения каждого из друзей состоит из параллельных линий (они будут перпендикулярны соответствующей данному другу паре бортиков). Число линий равно 2024. И если каждый j -й друг прочертил n_j линий, то $n_1 + n_2 + \dots + n_8 = 2024$. Теперь нам нужно максимизировать число пересечений, т.е. сумму всевозможных величин $n_k \cdot n_l$ при различных k, l .

Обоснуем, что максимум $\sum_{k < l} n_k \cdot n_l$ достигается при равенстве величин n_i . Переложим единицу с n_1 на n_2 и сравним суммы попарных произведений до и после:

$$n_1, n_2, n_3, \dots, n_m \rightarrow n_1 \cdot n_2 + n_1 \cdot n_3 + \dots + n_{m-1} \cdot n_m.$$

$$n_1 - 1, n_2 + 1, n_3, \dots, n_m \rightarrow (n_1 \cdot n_2 + n_1 \cdot n_3 + \dots + n_{m-1} \cdot n_m) - n_2 - n_3 - \dots - n_m + n_1 + n_3 + \dots + n_m - 1$$

То есть изменение суммы равно $n_1 - n_2 - 1$. Если $n_1 = n_2 + k$, (то есть n_1 было больше), то мы добиваемся прироста суммы произведений размера $k - 1$. Если, наоборот, n_2 было больше n_1 , то получается гарантированная убыль. Значит, если сумма n_i фиксированная, переложить баллы с большего n_i на меньшее n_j выгодно (если $|n_i - n_j| = 1$, то такие перекалывания ничего не добавляют). Получается, что самая выгодная конфигурация — когда нету больших и меньших значений, когда множители равны друг другу и общая сумма поделена поровну (а если поровну баллы не делятся, то n_i равны друг другу с точностью до единицы).

$2024 : 8 = 253$, а это число нечётное. Поэтому поровну поделить пробежки не получится — четверо сделают по 127 пробежек туда-сюда (1 группа), а четверо — по 126 (2 группа). Найдём их количество пересечений. Для этого удобно считать по отдельности пересечения первой группы с первой, второй группы со второй, первой группы со второй — и сложить их вместе. Получится

$$252^2 \cdot \frac{4 \cdot 3}{2} + 254^2 \cdot \frac{4 \cdot 3}{2} + 252 \cdot 254 \cdot 4^2 = 1792248.$$

В-3 23 друга катаются на катке в форме правильного 46-угольника. Каждый из них выбрал себе одну пару параллельных сторон катка и катается между ними по прямолинейной траектории: стартовав от первой стороны, он доезжает до второй, касается заснеженного бортика и едет обратно к первой. И так далее. Через какое-то время оказалось, что суммарно на всех бортиках оказалось 2024 отпечатков рук (включая сделанные в конце, а в начале движения отпечатки не делаются), в углах бортиков отпечатков нет, а все ребята стоят у того бортика, от которого начали движение. Какое максимальное число пересечений траекторий могло получиться? (Самопересечения траекторий не учитываются.)

Ответ: 1959232

В-4 88 друзей катаются на катке в форме правильного 176-угольника. Каждый из них выбрал себе одну пару параллельных сторон катка и катается между ними по прямолинейной траектории: стартовав от первой стороны, он доезжает до второй, касается заснеженного бортика и едет обратно к первой. И так далее. Через какое-то время оказалось, что суммарно на всех бортиках оказалось 2024 отпечатков рук (включая сделанные в конце, а в начале движения отпечатки не делаются), в углах бортиков отпечатков нет, а все ребята стоят у того бортика, от которого начали движение. Какое максимальное число пересечений траекторий могло получиться? (Самопересечения траекторий не учитываются.)

Ответ: 2024968